

## **Commande d'interrupteurs statiques**

### ***Obtention d'une grandeur alternative sinusoïdale à partir d'une source continue***

#### **Fonctions de connexion**

##### ***Mots clés :***

- Électronique de puissance
- Onduleurs
- Commande d'interrupteurs statiques
- Fonctions de connexion ou de commutation
- Modulation de largeur d'impulsion (MLI)
- Pulse width modulation (PWM)

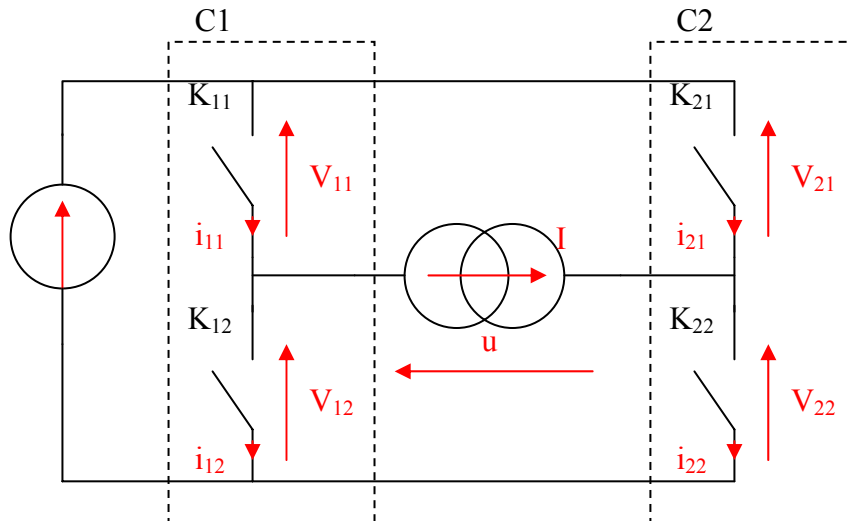
##### ***Sommaire :***

- **Présentation**
- **Préambule**
- **Relations générales**
- **Application au cas sinusoïdal**
- **Représentation vectorielle**
- **Application au triphasé**
- **Exercice**
- **Corrigé**
- **Compléments**

## Présentation :

Un onduleur est un convertisseur statique permettant, à partir d'une source continue (tension ou courant), d'obtenir une grandeur (courant ou tension) alternative qu'on désire la plus sinusoïdale possible.

Le schéma général d'un tel convertisseur est donné ci-dessous, l'échange d'énergie se faisant entre une source de tension et une source de courant (dans un sens ou dans l'autre):



Le convertisseur est constitué de 2 cellules de commutation C1 et C2 composées chacune de 2 interrupteurs fonctionnant périodiquement tous les  $T_e$ .

C'est en jouant sur les temps d'ouverture et de fermeture des interrupteurs  $K_{ci}$  ( $i$  ième interrupteur de la cellule  $n : c$ ) qu'on obtient, *en moyenne*, la variation temporelle désirée de la grandeur de sortie ( $u$  dans ce cas).

## Préambule :

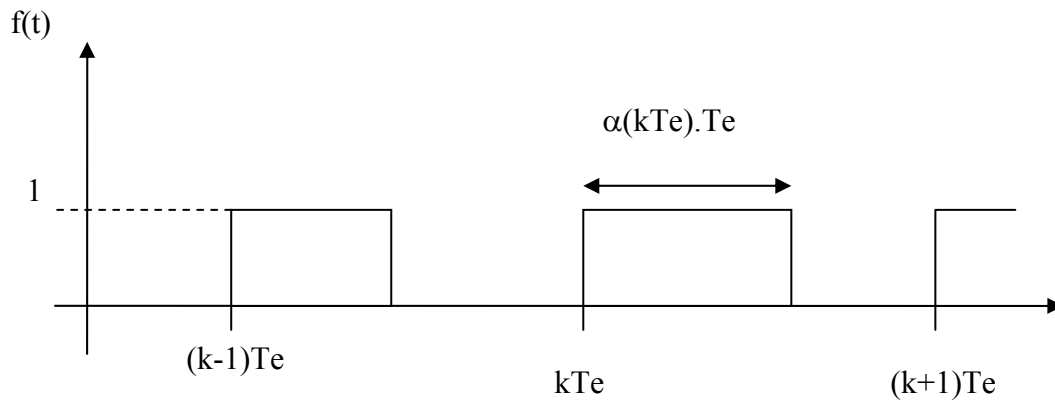
On considère l'échelle de temps divisée en intervalles d'une durée  $T_e$  constante et  $f$  une fonction du temps définie dans chaque intervalle de la forme  $kT_e$  et valant  $1$  une fraction  $\alpha$  de  $kT_e$ , et  $0$  jusqu'à l'intervalle suivant, la valeur de  $\alpha$  variant d'un intervalle à l'autre :

$$\alpha = \alpha(kT_e)$$

$$f(t) = \begin{cases} 1 \forall t \in [kT_e, kT_e + \alpha(kT_e)T_e] \\ 0 \forall t \in [kT_e + \alpha(kT_e)T_e, (k+1)T_e,] \end{cases}$$

$$\text{avec : } \begin{cases} \alpha(kT_e) \in [0,1] \\ k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Cette fonction, définissant les durées d'ouverture et de fermeture d'un interrupteur est appelée **fonction de connexion ou de commutation**



On associe à  $f$  la fonction  $\phi$  définie sur l'intervalle  $[(k-1)T_e, kT_e]$  par :

$$\phi = \frac{1}{T_e} \int_{(k-1)T_e}^{kT_e} f(t) dt$$

*autrement dit,  $\phi$  est égale à la valeur moyenne de  $f$  sur la période précédant l'instant  $kT_e$ .*

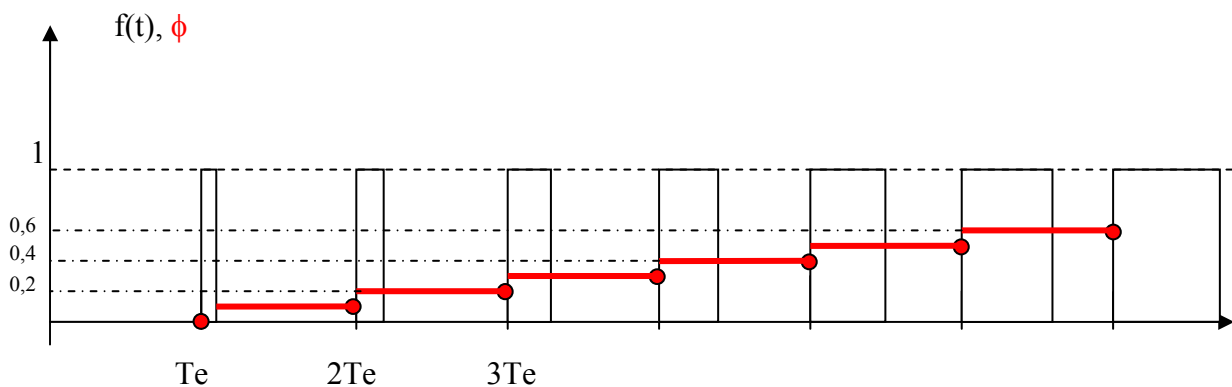
On a :

$$\phi = \alpha[(k-1)T_e] \text{ et que, en conséquence : } \phi \in [0,1] \forall k$$

**Exemple :**

$$\alpha(kT_e) = 0,1k$$

$$k \in [0,10]$$



## Relations générales :

On appelle **fonction de connexion** associée à l'interrupteur  $K_{ci}$ , la fonction du temps  $f_{ci}$  valant soit **0** soit **1** (**0** interrupteur ouvert, **1** interrupteur fermé).

la commande des interrupteurs d'une même cellule étant complémentaire, la tension  $v_{ci}$  vaut **0** lorsque  $f_{ci} = 1$ , et **E** lorsque l'interrupteur complémentaire est fermé.

D'autre part, le courant traversant un interrupteur est égal au courant **I** lorsque celui-ci est fermé, **0** sinon

$$v_{ci} = E(1 - f_{ci})$$

$$i_{ci} = f_{ci}I$$

$$f_{c1} + f_{c2} = 1$$



**toutes les grandeurs sont des grandeurs instantanées**

On a de plus les relations du circuit :

$$E = v_{11} + u + v_{22}$$

$$E = v_{21} - u + v_{12}$$

$$u = v_{21} - v_{11} = E(1 - f_{21}) - E(1 - f_{11}) = E(f_{11} - f_{21})$$

$$u = v_{12} - v_{22} = E(1 - f_{12}) - E(1 - f_{22}) = E(f_{22} - f_{12})$$

Et, dans le cas particulier du monophasé, on a :

$$f_{11} = f_{22}$$

$$f_{21} = f_{12}$$

d'où :

$$u = E(f_{11} - f_{21}) = E(f_{11} - f_{12}) = E(f_{11} - 1 + f_{11}) = E(2f_{11} - 1)$$

$$u = E(f_{22} - f_{12}) = E(f_{22} - f_{21}) = E(f_{22} - 1 + f_{22}) = E(2f_{22} - 1)$$

soit, en valeur moyenne **sur une période  $T_e$**  :

$$u_{moy}(T_e) = E(2f_{11_{moy}(T_e)} - 1) = E(2f_{22_{moy}(T_e)} - 1)$$

relation qui généralise la relation usuelle (à rapport cyclique constant):

$$u_{moy} = E(2\alpha - 1)$$

### Application au cas sinusoïdal :

Supposons maintenant, qu'on veuille que la valeur moyenne de  $u$  évolue « lentement » au cours du temps selon une fonction sinusoïdale, le terme « lentement » signifiant que la période  $T=2\pi/\omega$  de cette sinusoïde sera très grande devant  $T_e$  :

$$u_{moy(T_e)}(t) = V_m \sin \omega.t$$

en remplaçant on trouve alors pour la valeur moyenne de la fonction de commutation (cellule 1 par exemple):

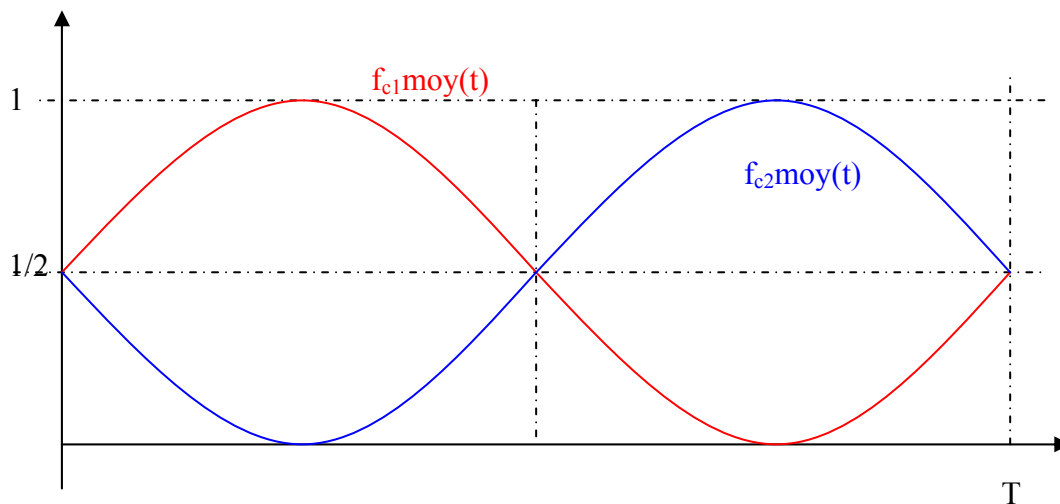
$$f_{11_{moy(T_e)}}(t) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{V_m}{E} \sin \omega.t \right]$$

Comme  $f_{11}$  est inférieure à 1 :

$$f_{11_{moy(T_e)}}(t) = \frac{1}{2} [1 + \sin \omega.t]$$

De la même façon, on trouve pour le deuxième interrupteur :

$$f_{12_{moy(T_e)}}(t) = \frac{1}{2} [1 - \sin \omega.t]$$



On obtient ainsi une tension moyenne sinusoïdale en sortie de l'onduleur de valeur efficace :

$$V = \frac{E}{\sqrt{2}} \approx 0,707E$$

**note :**

il faut bien sûr veiller à ce que les 2 interrupteurs d'une même cellule ne soient pas fermés simultanément, et tenir compte du fait qu'ils peuvent être encore conducteurs après une commande d'ouverture (temps  $t_{off}$ , introduction d'un temps mort).

Il est également possible de faire varier l'amplitude de la tension de sortie en imposant des fonctions de connexion de la forme :

$$f_{11_{moy/Te}} = \frac{1}{2} [1 + A \sin \omega t]$$

$$A \leq 1$$

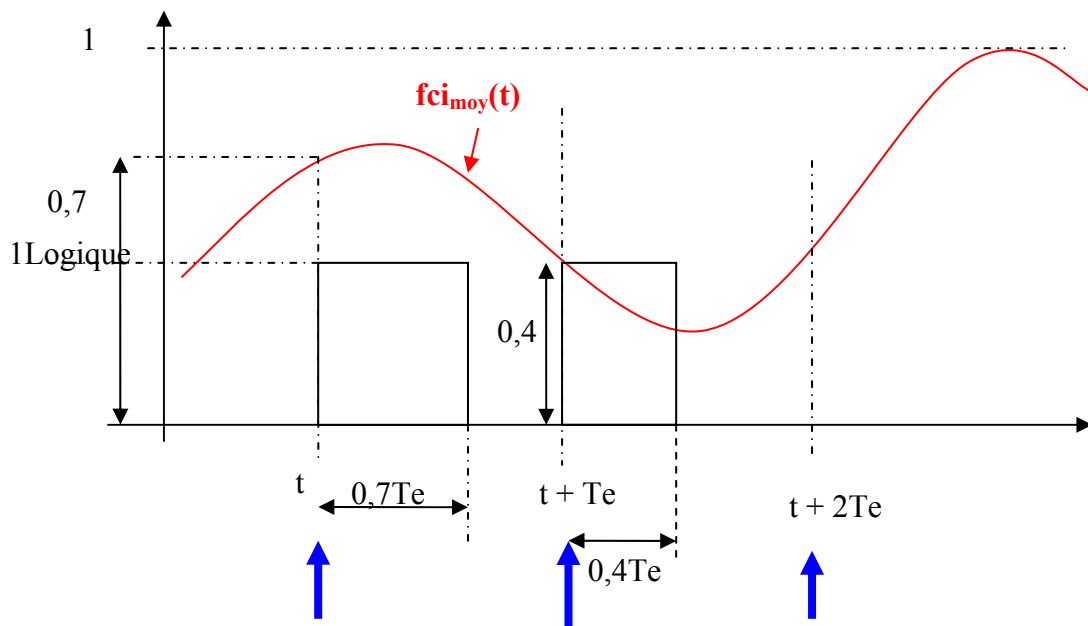
La tension efficace de sortie vaut alors :

$$V = A \frac{E}{\sqrt{2}}$$

les  $f_{cimoy}$  ne sont autres que les fonctions  $\Phi$  définies en préliminaire et les fonctions  $f$  permettant de remonter aux fonctions de connexion sont les fonctions échantillonnées de  $f_{cimoy}(t)$  tous les  $Te$  :

$$\phi(kT_e) = f_{cimoy}^*(t)_{/T_e}$$

en clair, la durée relative de fermeture d'un interrupteur dans l'intervalle  $[(k-1)Te, kTe]$  est égale à la valeur de la fonction  $f_{cimoy}(kTe)$ . Par exemple, si  $f_{cimoy}(kTe)=0,7$ , la durée relative de fermeture de l'interrupteur sera de 70% :



- ❖ Les variations de  $f_{cimoy}(t)$  entre les instants  $t$  et  $t+Te$  sont perdues, les instants d'échantillonnage sont repérés par les flèches bleues.
- ❖ Une modification de  $f_{cimoy}(t)$  (élaborée par le système de commande) sera prise en compte au plus tôt immédiatement, et au plus tard à  $Te$  (plus tard), tous les événements étant équiprobables, il apparaît un retard moyen de  $Te/2$  (ce qui va se traduire par un déphasage du fondamental de la tension alternative)

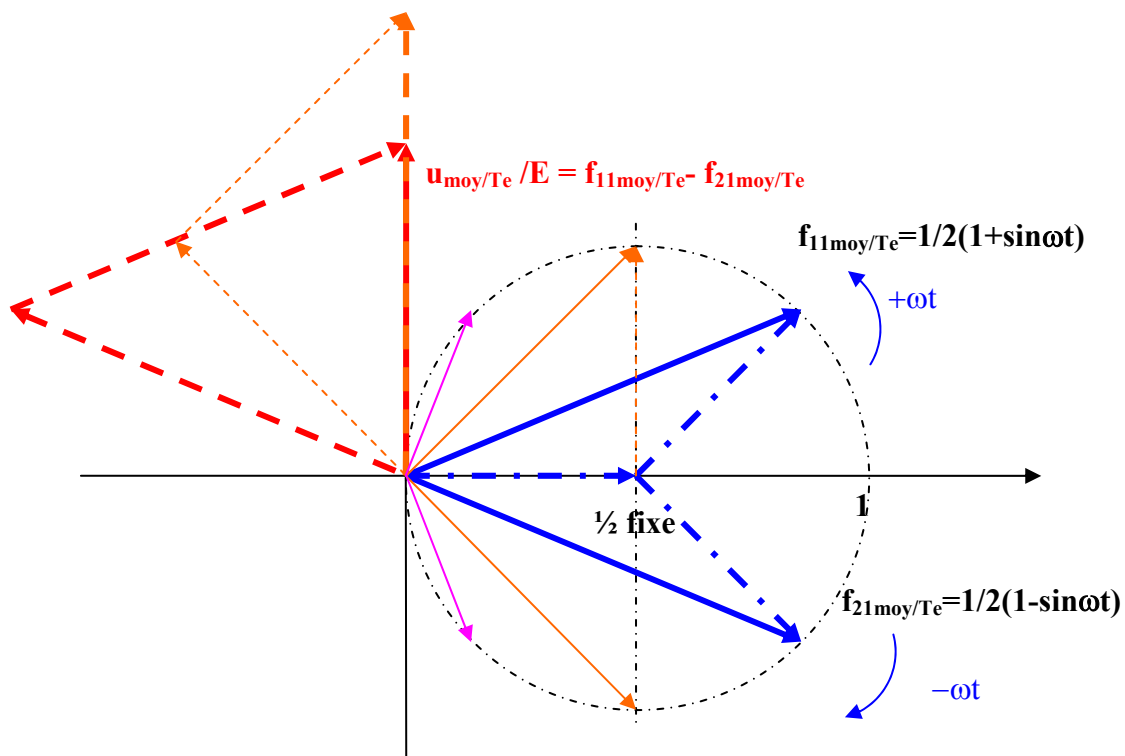
- ❖ Les commutations peuvent débuter à n'importe quel moment de la période  $T_e$ , la seule contrainte étant que leur durée corresponde à la valeur moyenne  $f_{\text{cimoy}}$  (voir exercice)
- ❖ La fréquence maximale de  $f_{\text{ci}}(\mathbf{t})$  doit respecter le théorème de Shannon (ce qui n'est pas le cas de la figure ci-dessus):

$$\frac{1}{T_e} \succ \frac{2}{T}$$

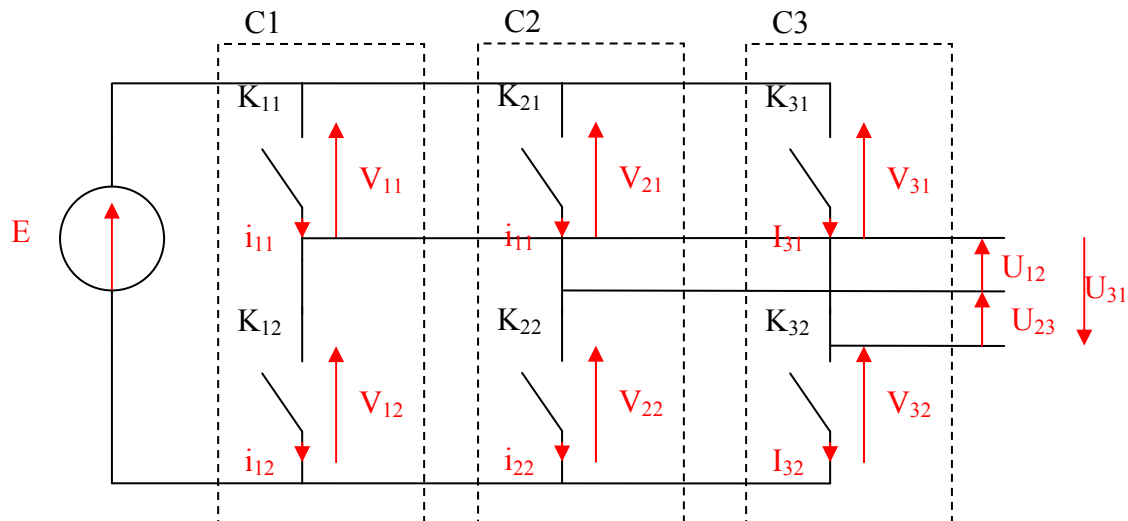
### Représentation vectorielle :

On peut représenter chaque fonction de connexion comme étant la  $\frac{1}{2}$  somme d'un vecteur unité de direction fixe et d'un vecteur de même module tournant à la vitesse  $\pm\omega$ .

On obtient simplement la tension de sortie  $\mathbf{u}_{\text{moy}/T_e} / E$  en faisant la différence des vecteurs associés à  $f_{11\text{moy}/T_e}$  et  $f_{21\text{moy}/T_e}$  :



le vecteur  $\mathbf{u}_{\text{moy}/T_e}$  dont on a rapporté la norme à  $E$  est fixe et son amplitude est modulée sinusoïdalement, le maximum étant atteint pour  $\omega t = \pi/2$ .

**Cas triphasé :**

On retrouve 3 fois le schéma monophasé avec les tensions  $u_{12}$ ,  $u_{23}$  et  $u_{31}$  jouant le rôle de  $u$ . Avec les mêmes raisonnements, on a les tensions instantanées entre phases:

$$u_{12} = E(f_{11} - f_{21})$$

$$u_{23} = E(f_{21} - f_{31})$$

$$u_{31} = E(f_{31} - f_{11})$$

qui s'écrivent sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{23} \\ u_{31} \end{pmatrix} = E \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ f_{31} \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice étant nul, il n'est pas possible d'écrire de façon univoque les  $f_{ci}$  en fonction des 3 tensions triphasées désirées et il faut donc **choisir** les valeurs moyennes sur  $T_e$  des  $f_{ci}$  telles que les valeurs moyennes sur  $T_e$  des  $u_{ij}$  forment un système triphasé équilibré.

En s'inspirant du cas monophasé, on peut choisir :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{11_{moy/Te}} = \frac{1}{2}(1 + \sin \omega.t) \\ f_{21_{moy/Te}} = \frac{1}{2}\left(1 + \sin\left(\omega.t - \frac{2\pi}{3}\right)\right) \\ f_{31_{moy/Te}} = \frac{1}{2}\left(1 + \sin\left(\omega.t - \frac{4\pi}{3}\right)\right) \end{array} \right.$$

D'autres solutions sont possibles, les contraintes à observer, outre celles imposées par les équations liant les  $\mathbf{u}_{ij}$  aux  $\mathbf{f}_{ci}$ , sont que les  $\mathbf{f}_{ci}$  doivent être comprises entre  $\mathbf{0}$  et  $\mathbf{1}$

(par exemple toutes les fonctions de la forme :  $A(t) + B \sin\left(\omega.t - \frac{2k\pi}{3}\right)$  conviennent pour peu que leur amplitude reste comprise entre 0 et 1)

Le système donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{12_{moy/Te}} = \frac{\sqrt{3}}{2} E \sin\left(\omega.t + \frac{\pi}{6}\right) \\ u_{23_{moy/Te}} = \frac{\sqrt{3}}{2} E \sin\left(\omega.t - \frac{3\pi}{6}\right) \\ u_{31_{moy/Te}} = \frac{\sqrt{3}}{2} E \sin\left(\omega.t - \frac{7\pi}{6}\right) \end{array} \right.$$

Les  $\mathbf{u}_{ijmoy}$  forment bien un système triphasé équilibré de valeur efficace :

$$U = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} E \approx 0,612E$$

**Exercice :**

On considère dans un premier temps que l'interrupteur  $K_{11}$  se ferme en premier au début de la période  $T_e$  et ensuite  $K_{21}$ .

- 1) Tracer sur des chronogrammes les intervalles de conduction des interrupteurs  $K_{11}$  et  $K_{21}$  pour une tension de sortie  $V$  à  $f = 50\text{Hz}$  avec  $F_e = 1/T_e = 250\text{Hz}$  (on pose  $N = f_e/f$ )
- 2) En déduire le graphe de la tension instantanée  $V(t)$  et celui de  $V_{\text{moy}/T_e}(t)$
- 3) Déterminer le contenu harmonique de  $V(t)$  (les coefficients en cosinus et sinus de la série de Fourier)

La durée de fermeture de  $K_{11}$  est maintenant centrée sur  $T_e/2$  pendant la première période  $T_e$ , puis, pendant la seconde période c'est celle de  $K_{21}$  et ainsi de suite en alternant pendant les  $N$  périodes.

- 1) Mêmes questions que précédemment

Dans les deux cas, déterminer le déphasage du fondamental par rapport à l'instant 0 de la commande et le taux de distorsion  $\text{THD}_{30}$  pour les 30 premiers harmoniques.

Quel est le mode de commande le plus satisfaisant ?

**Corrigé :**

Les coefficients complexes de la série de Fourier sont donnés par :

$$c_n = \frac{1}{T} \int_T v(t) e^{-jn\omega t} dt$$

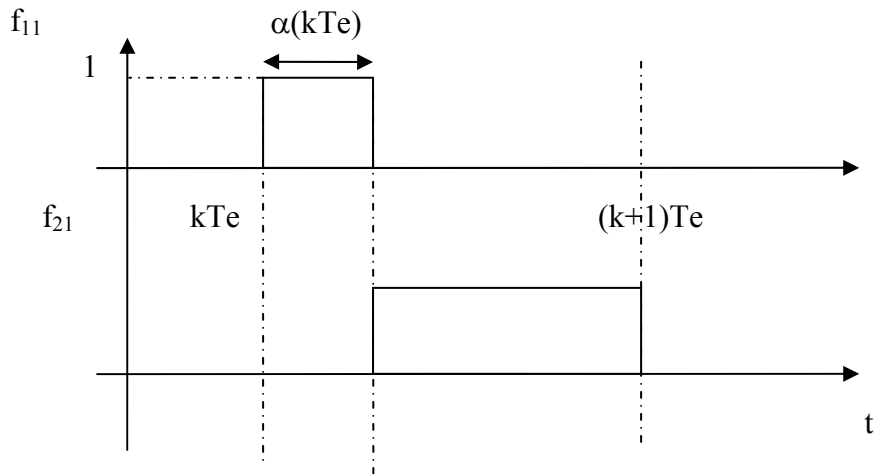
$$c_n = \frac{1}{2} (a_n - jb_n)$$

$$v(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \sin(n\omega t + \varphi_n); \varphi_n = \text{Arctg}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$$

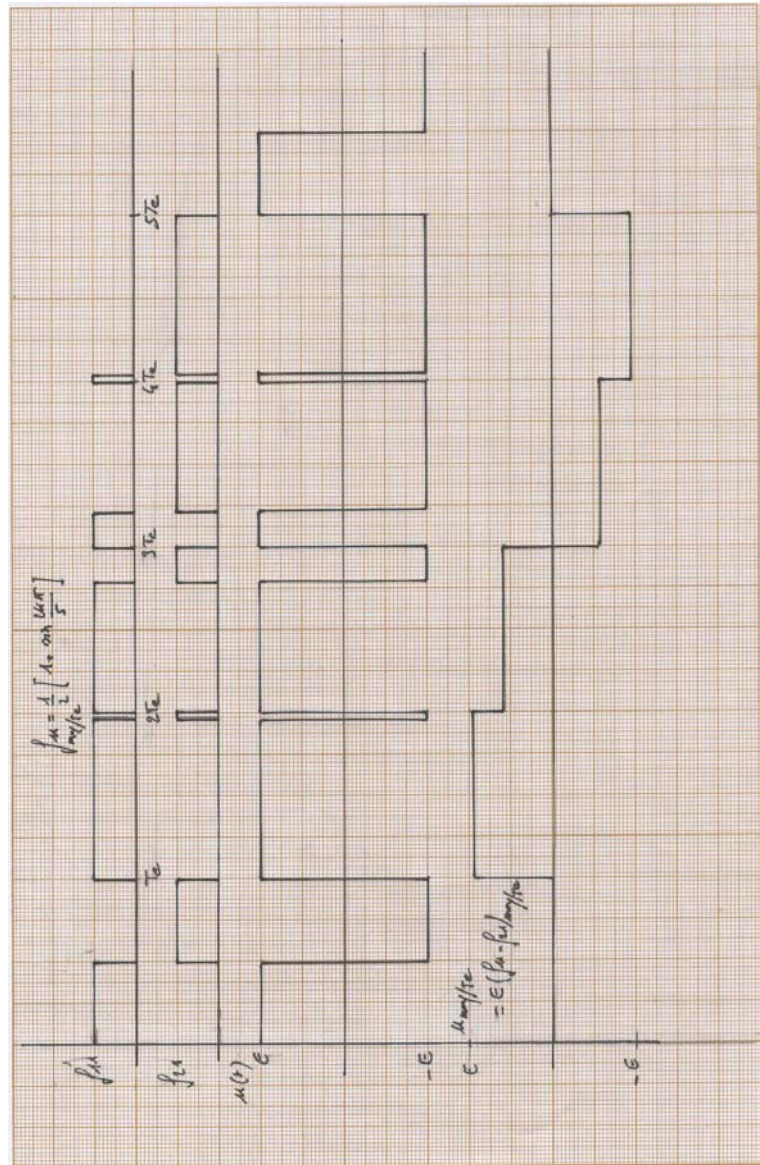
la valeur instantanée de  $v(t)$  est donnée par :

$$v(t) = E(f_{11} - f_{21}) \text{ où } f_{11} \text{ et } f_{21} \text{ valent 1 ou 0 selon l'instant } kT_e.$$

**Premiers cas, commutations non symétriques par rapport à  $Te/2$  :**



k	$f_{11}$	$f_{21}$
0	0,5	0,5
1	0,976	0,0245
2	0,794	0,206
3	0,206	0,794
4	0,0245	0,976



**Contenu harmonique de  $v/E$  :**

Sur une période  $T_e$  on a :

$$c_n(k) = \frac{1}{T} \int_{kT_e}^{kT_e + \alpha} 1 e^{-jn\omega t} dt + \frac{1}{T} \int_{kT_e + \alpha}^{(k+1)T_e} (-1) e^{-jn\omega t} dt$$

et :

$$c_n = \sum_{k=0}^{N-1} c_n(k)$$

on trouve :

$$\begin{aligned} c_n(k) &= j \frac{1}{n\pi} e^{-j \frac{2n\pi}{N}(k+\alpha)} - j \frac{1}{2n\pi} \left[ e^{-j \frac{2n\pi}{N}k} - e^{-j \frac{2n\pi}{N}(k+1)} \right] \\ &= j \frac{1}{n\pi} e^{-j \frac{2n\pi}{N} \left[ k + \frac{1}{2} \left( 1 + \sin \frac{2k\pi}{N} \right) \right]} - j \frac{1}{2n\pi} \left[ e^{-j \frac{2n\pi}{N}k} - e^{-j \frac{2n\pi}{N}(k+1)} \right] \end{aligned}$$

L'utilisation d'un tableur permettant le calcul complexe évite d'avoir à se lancer dans des calculs fastidieux ; on donne les résultats ci-dessous contenu harmonique et tension  $v(t)$  reconstituée à partir de la somme de ses composantes harmoniques.

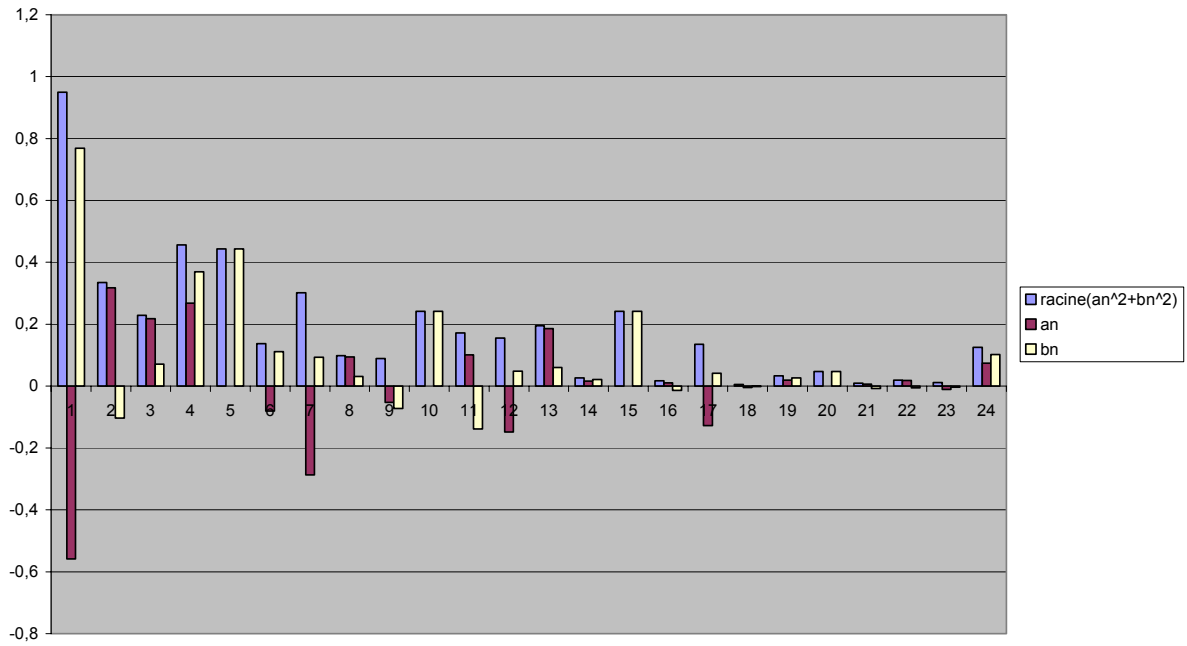
On observe que tous les rangs sont présents avec des valeurs importantes pour **4** et **5**, la présence de l'harmonique **5** étant surtout due au découpage  $T_e = T/5$

Le taux de distorsion atteint **103%** (à comparer avec un signal carré  $THD_{30} = 46,6\%$ )  
Le procédé est donc sans intérêt (autre que pédagogique) dans ce cas avec une valeur aussi faible de  $N$ .

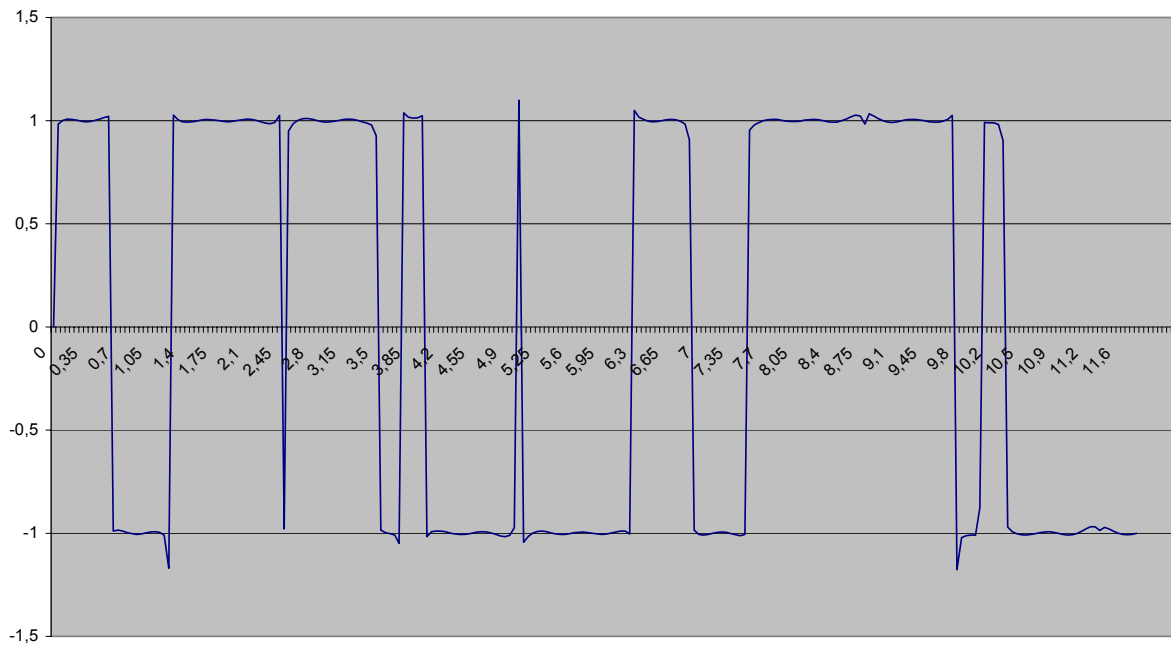
On trouve pour  $a_1 = -0,558505465$  et  $b_1 = 0,768716825$ , le déphasage du fondamental vaut :

$$\varphi_1 = \arctg\left(\frac{a_1}{b_1}\right) = -0,62831853 = -\frac{2\pi}{10} \text{ soit l'angle correspondant à } T_e/2$$

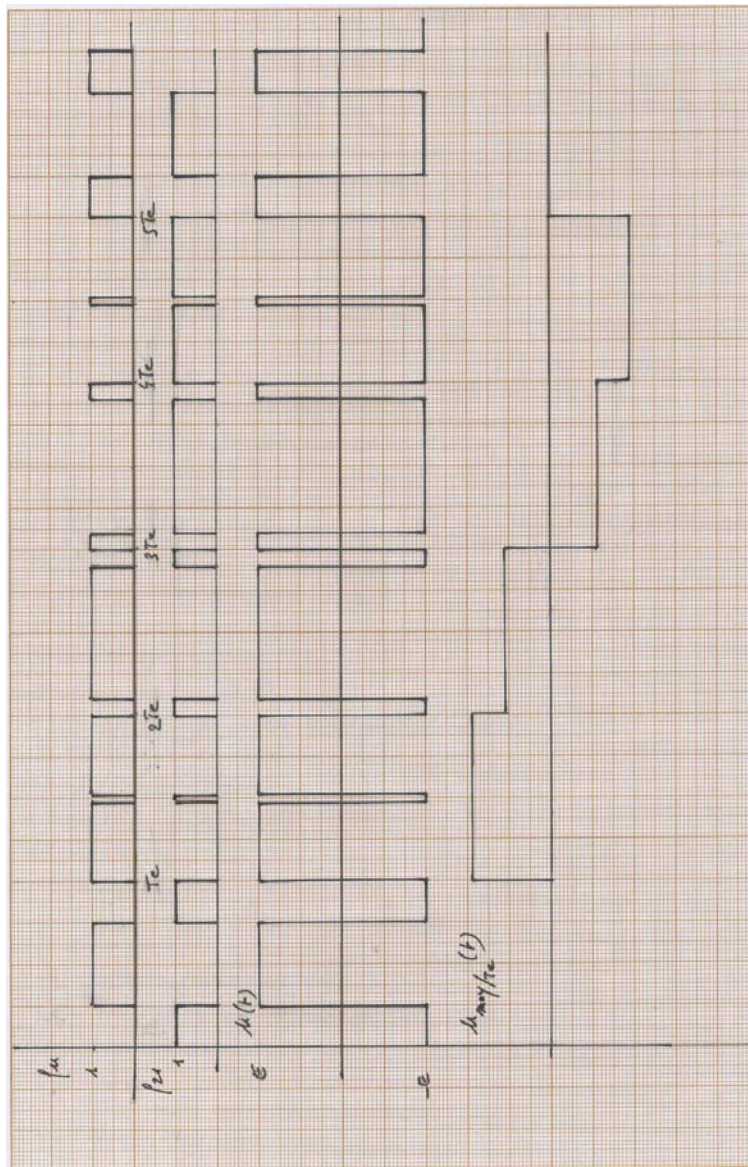
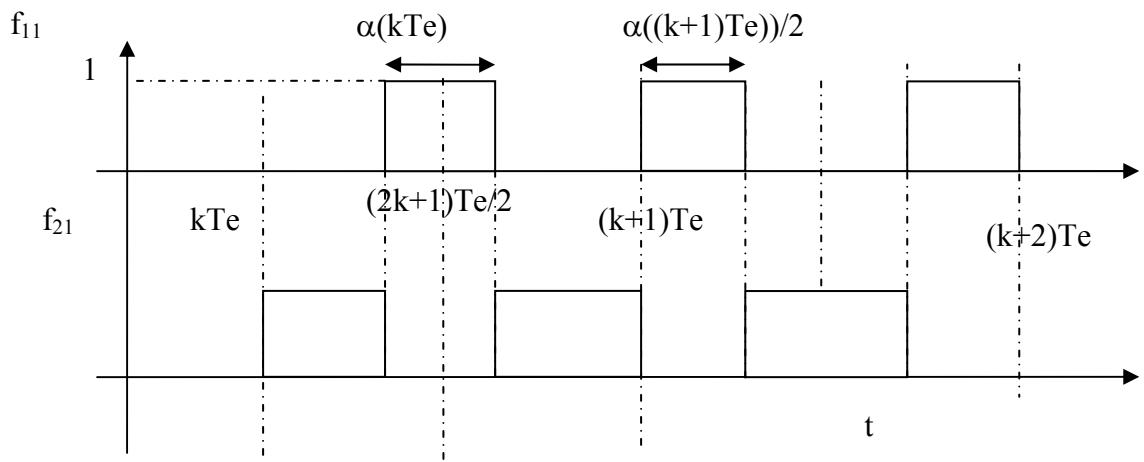
N=5, commutations non symétriques par rapport à Te/2



N=5, reconstitution 150 premiers harmoniques commutations non symétriques par rapport à Te/2



*Deuxième cas : commutations symétriques par rapport à  $T_e/2$  :*



**Contenu harmonique de v/E :**

Il faut distinguer k pair et k impair :

On trouve :

❖ K pair

$$c_n(k) = j \frac{e^{-j \frac{n\pi}{N}(2k+1)}}{n\pi} \left[ e^{-j \frac{n\pi}{N} \frac{1}{2} \left( 1 + \sin \frac{2k\pi}{N} \right)} - e^{-j \frac{n\pi}{N} \left[ -1 + \frac{1}{2} \left( 1 - \sin \frac{2k\pi}{N} \right) \right]} \right] +$$

$$j \frac{1}{2n\pi} \left[ e^{-j \frac{2nk\pi}{N}} - e^{-j \frac{2n\pi}{N}(k+1)} \right]$$

❖ K impair

$$c_n(k) = j \frac{e^{-j \frac{2kn\pi}{N}}}{n\pi} \left[ e^{-j \frac{n\pi}{N} \frac{1}{2} \left( 1 + \sin \frac{2k\pi}{N} \right)} - e^{-j \frac{n\pi}{N} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( 1 - \sin \frac{2k\pi}{N} \right) \right]} \right] -$$

$$j \frac{1}{2n\pi} \left[ e^{-j \frac{2nk\pi}{N}} - e^{-j \frac{2n\pi}{N}(k+1)} \right]$$

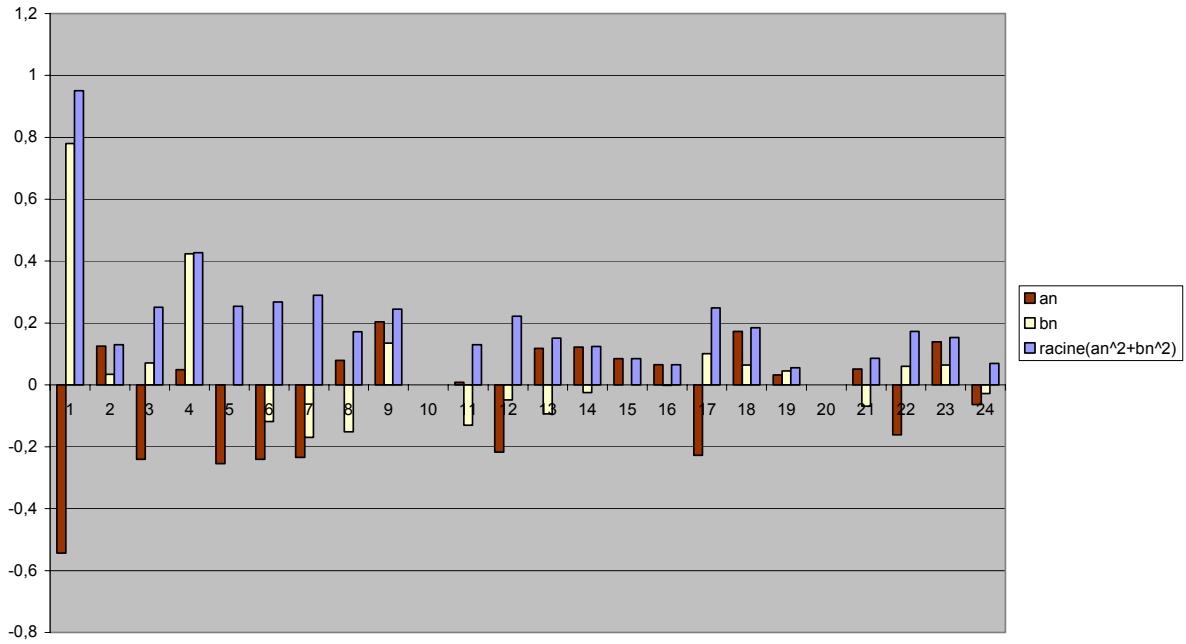
On observe par rapport au cas précédent une importante atténuation de l'harmonique 2, les rangs 4 et 5 restant toutefois inchangés à respectivement 42,7% et 26,8%

Le taux de distorsion présente une petite amélioration avec **100%**( !!!)

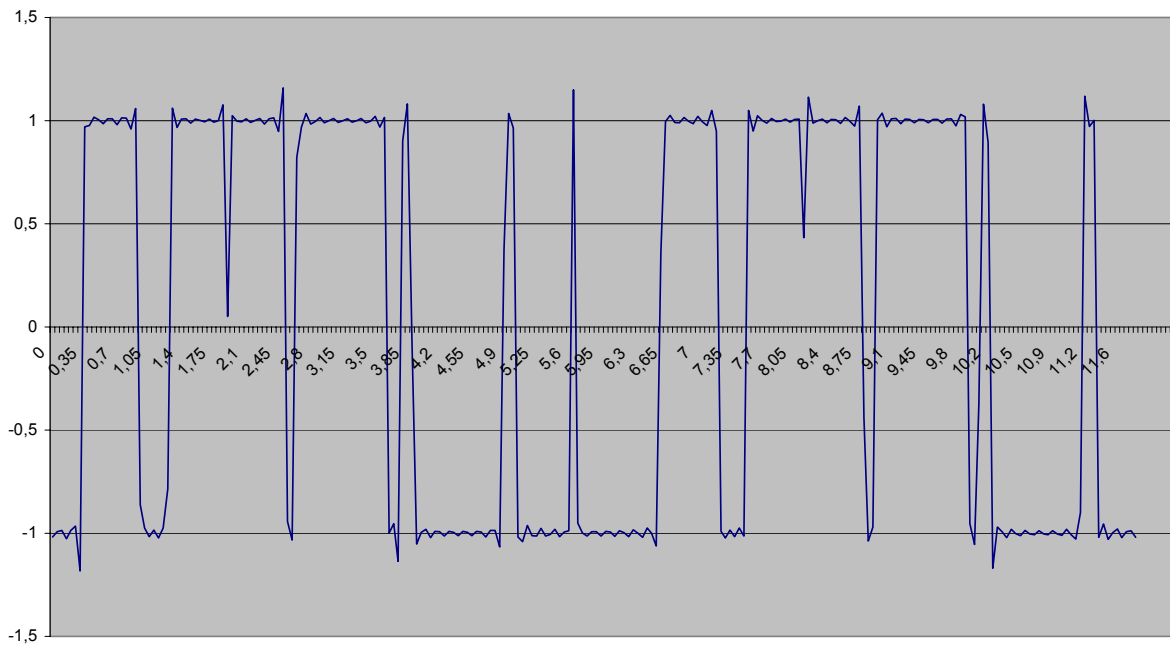
On trouve pour  $a_1 -0.5432131$  et  $b_1 0,78043056$ , le déphasage du fondamental est lui aussi légèrement diminué :

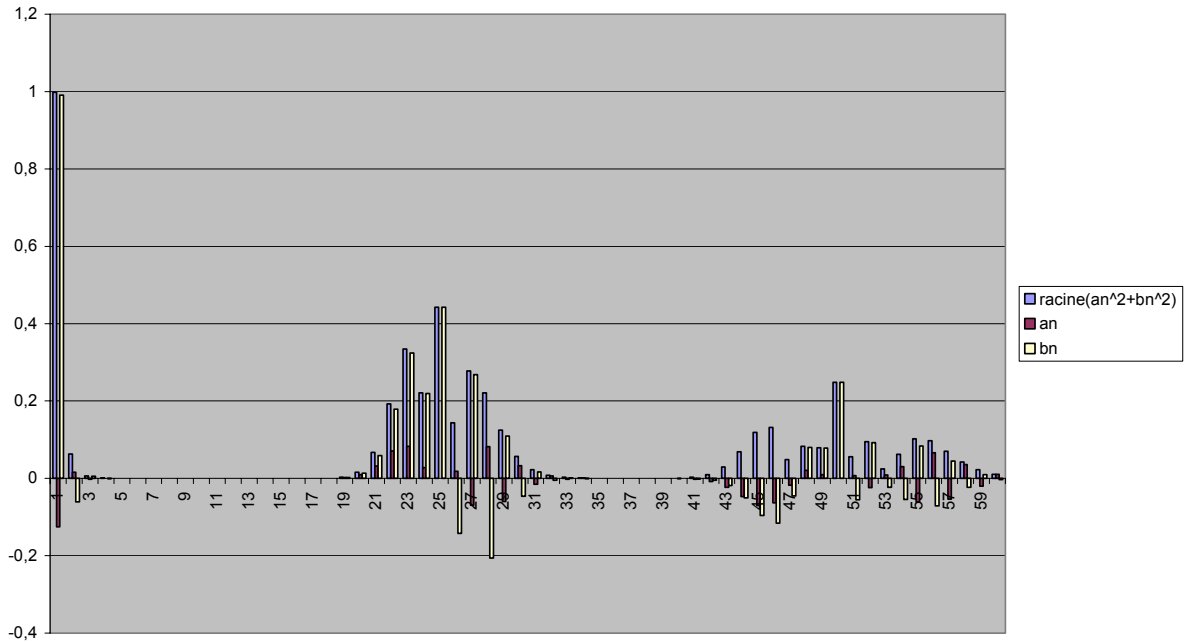
$$\varphi_1 = \arctg\left(\frac{a_1}{b_1}\right) = -0,608065123 = -\frac{2\pi}{10,33}$$

N=5, commutations symétriques par rapport à  $T_e/2$



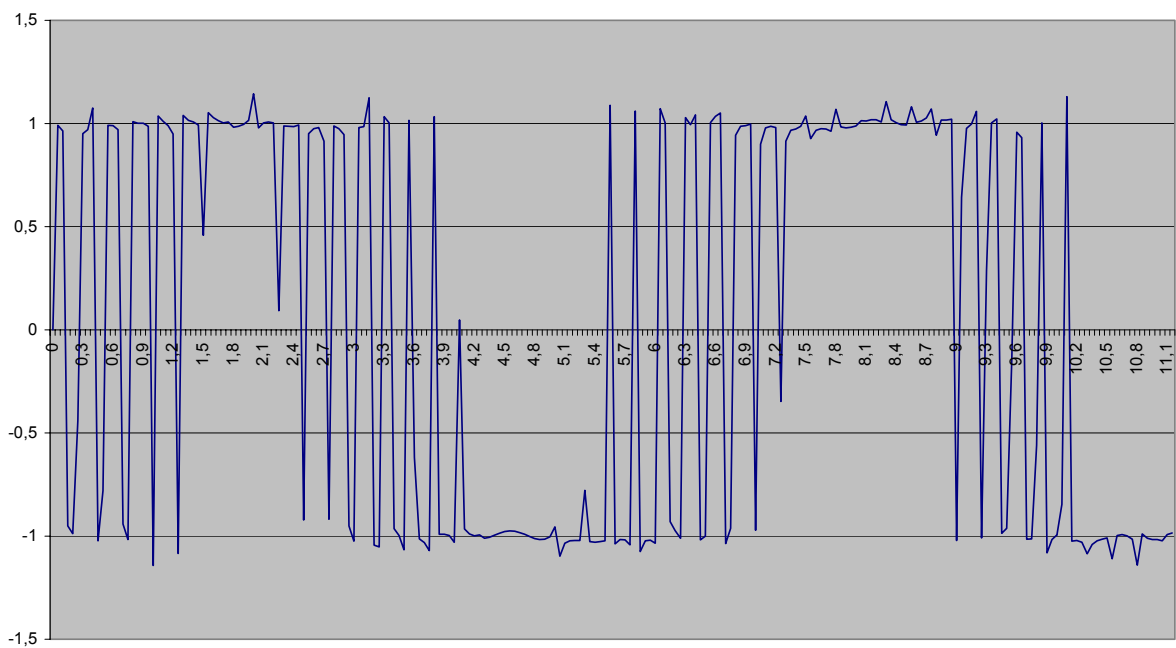
N=5, commutations symétriques par rapport à  $T_e/2$ , reconstitution 150 premiers harmoniques



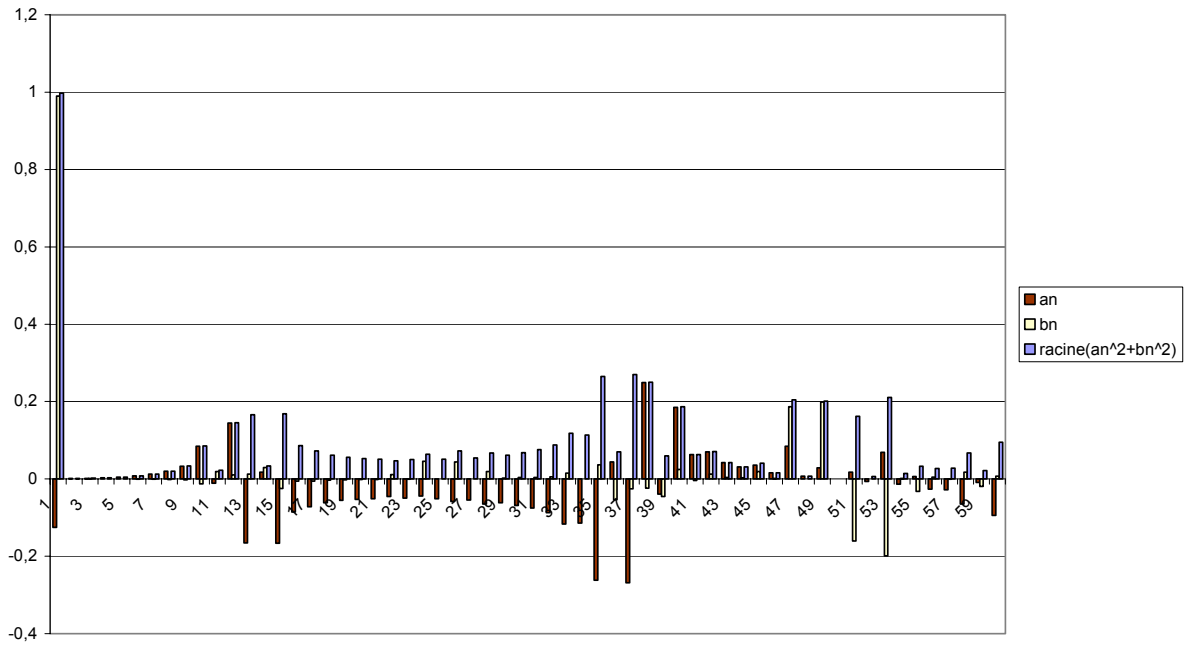
**Compléments :****N=25, commutations non symétriques par rapport à  $T_e/2$** 

Taux de distorsion pour les 60 premiers harmoniques :

$$THD_{60}=85,37\%$$

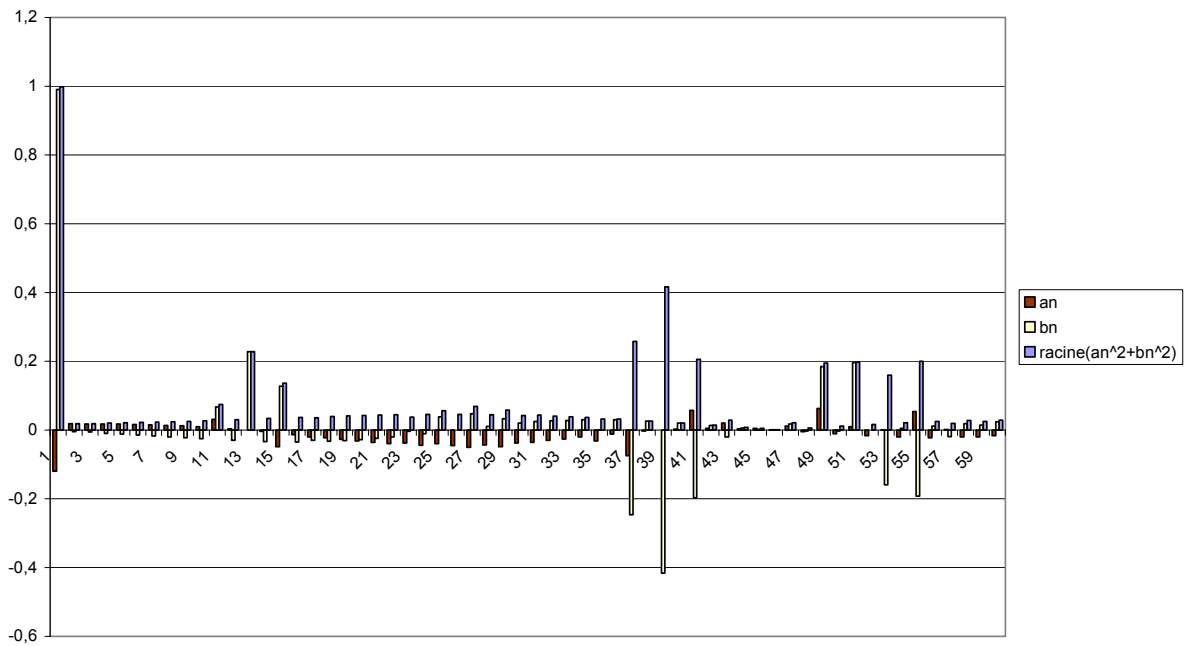
**N=25, reconstitution 150 premiers harmoniques commutations non symétriques par rapport à  $T_e/2$** 

N=25, commutations symétriques par rapport à  $Te/2$



$THD_{60}=78,72\%$

N=26, commutations symétriques par rapport à  $Te/2$



$THD_{60}=74,6\%$

on peut tirer de ces graphiques les conclusions suivantes :

***Commutations non symétriques:***

Le contenu harmonique se trouve groupé autour du rang N qui présente une amplitude importante (>40%) puis autour de 2N avec une amplitude max encore supérieure à 20% etc....

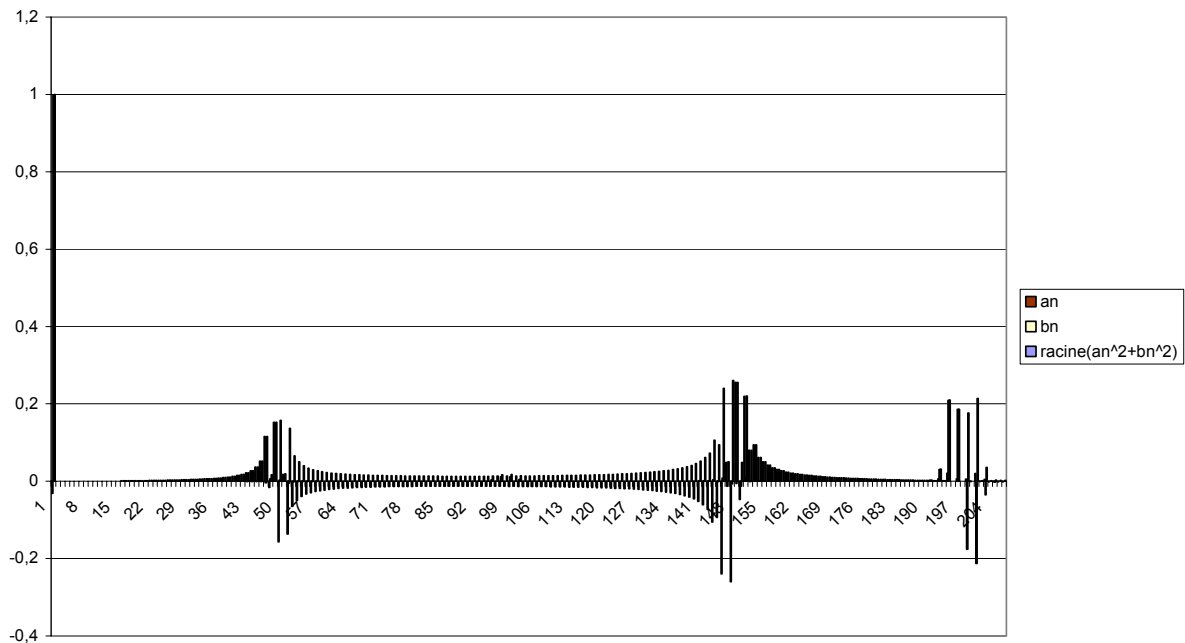
***Commutations symétriques :***

Le contenu harmonique se trouve groupé autour du rang N/2 qui présente une amplitude plus modérée (environ 20%) puis aux environs de 2N/3 on trouve des harmoniques d'amplitude supérieure (de 23 à 40% selon le cas)

Avec N impair ce regroupement est plus large (diffus) qu'avec N pair pour lequel la concentration des harmoniques est plus importante autour de N/2 avec comme inconvénients une amplitude de 23% pour le rang N/2 (au lieu de 18% N impair) et une proximité plus grande du fondamental.

En termes de taux de distorsion, on ne fait guère mieux que pour un signal carré. Cependant, l'énorme avantage réside dans l'absence quasi-totale des harmoniques « proches » (de rang 3, 5, 7...,13) responsables de contraintes supplémentaires dans l'alimentation des machines électriques.

N=99, commutations symétriques par rapport à  $T_e/2$



N=100, commutations symétriques par rapport à  $T_e/2$

